فصل پنجم

معادلات با مشتقات جزئی

تعاریف اولیه

یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی معادله‌ای است که ارتباط بین یک تابع چند متغیره و مشتقات آن نسبت به متغیرهای مختلف و خود آن متغیرها را نشان می‌دهد. چنانچه بتوان این معادله را به گونه‌ای بیان کرد که شامل هیچ جمله غیرخطی از تابع و مشتقات تابع نباشد آن را از نوع خطی گویند.

در یک معادله دیفرانسیل خطی چنانچه جملات شامل تابع و یا یکی از مشتقات آن باشد آن معادله دیفرانسیل خطی را همگن می‌نامیم.

$xy''' + 4y' + y^2 = x$ معادله دیفرانسیل معمولی ـ غیر خطی

$x^2 y \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 4y^2 \frac{\partial u}{\partial x} = xy$ معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی ـ خطی ـ غیرهمگن

در ارتباط با این معادلات به چند بحث زیر توجه کنید:

نوشتن یک معادله با مشتقات جزئی با تغییر متغیرهای داده شده:

برخی مواقع یک معادله با مشتقات جزئی داده شده و می‌خواهیم با تغییر متغیرهای خاص آن را بازنویسی کنیم در این مواقع لازم است با استفاده از قانون زنجیره‌ای در مشتقات جزئی معادله مورد نظر را ساده کنیم.

مثال : معادله با مشتقات جزئی $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = nz$ با تغییر متغیرها $p = \frac{1}{2}(\text{Ln}x + \text{Ln}y)$ و $q = \frac{1}{2}(\text{Ln}x - \text{Ln}y)$ به چه فرمی در خواهد آمد؟

حل :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial q}.\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial p}\left(\frac{1}{2x}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)\left(\frac{1}{2x}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial q}.\frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial p}\left(\frac{1}{2y}\right) + \frac{\partial z}{\partial q}\left(\frac{-1}{2y}\right)$$

با استفاده از این مقادیر در معادله اصلی به‌دست می‌آید:

$$x\left(\frac{1}{2x}\left(\frac{\partial z}{\partial p}+\frac{\partial z}{\partial q}\right)\right)+y\left(\frac{1}{2y}\left(\frac{\partial z}{\partial p}-\frac{\partial z}{\partial q}\right)\right)=nz \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial p}=nz$$

حذف تابع اختیاری در یک رابطه داده شده و یافتن معادله با مشتقات جزئی حاکم بر آن:

می‌دانیم یک دسته منحنی شامل یک ثابت اختیاری را می‌توان به منزله جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول دانست که برای یافتن آن معادله دیفرانسیل کافی است بین آن رابطه و مشتق آن، ثابت داده شده را حذف کنیم.

به همین ترتیب یک رابطه شامل یک تابع اختیاری را می‌توان به منزله جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه اول دانست که برای یافتن آن معادله کافیست بین آن رابطه و مشتقات جزئی آن، تابع داده شده را حذف کنیم.

مثال : رابطه $z=y^2\varphi(xy)$ که در آن φ یک تابع اختیاری است مفروض است، معادله با مشتقات جزئی حاکم بر z را بیابید.

x, y متغیرهای مستقل و z تابع فرض شده است با فرض $xy=u$ داریم:

حل :

$$z=y^2\varphi(u) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}.\dfrac{\partial u}{\partial x}.y^2=y^2.\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}.y & \text{I} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=2y\varphi+y^2\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}.\dfrac{\partial u}{\partial y}=2y\varphi+y^2\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}.x & \text{II} \\ \text{فرض مساله}: z=y^2\varphi & \text{III} \end{cases}$$

$$(\text{I}): \frac{\partial \varphi}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{1}{y^3}\right)$$

$$(\text{II}): \frac{\partial z}{\partial y}-\frac{2z}{y}=xy^2\frac{\partial \varphi}{\partial u} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial u}=\left(\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{2z}{y}\right)\frac{1}{xy^2}$$

حال با مساوی قرار دادن رابطهٔ I و II به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{2z}{y}=\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}$$

نکته : فرض کنید $z=z(x,y)$ و داشته باشیم $F\big(u(x,y,z),v(x,y,z)\big)=0$ که در آن F تابع اختیاری است برای حذف تابع اختیاری F و یافتن معادله با مشتقات جزئی حاکم بر z می‌توان دترمینان زیر را بسط داد:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}=0$$

به عنوان مثال در همان مساله قبلی می‌توانستیم بنویسیم:

$$z=y^2\varphi(x,y) \Rightarrow \frac{z}{y^2}=\varphi(x,y) \Rightarrow F\left(xy,\frac{z}{y^2}\right)=0$$

حال $v=\dfrac{z}{y^2}$ و $u=xy$ بوده و داریم (x, y متغیرهای مستقل و z تابع است)

$$\begin{vmatrix} y & x \\ \dfrac{\frac{\partial z}{\partial x}}{y^2} & \dfrac{\frac{\partial z}{\partial y}y^2-2yz}{y^4} \end{vmatrix}=0\Rightarrow\cdots$$

حل معادلات با مشتقات جزئی در حالات خاص به کمک انتگرال گیری

برخی مواقع با انتگرال‌گیری‌های ساده از یک معادله با مشتقات جزئی ممکن است بتوانیم جواب معادله مورد نظر را پیدا کنیم.

مثال : جواب عمومی معادله زیر را مشخص کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=xy^2 \\ u(x,0)=x \\ u(0,y)=\sin y \end{cases}$$

حل :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=xy^2 \xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری نسبت به } x} \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x^2}{2}y^2+A(y) \xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری نسبت به } y} u(x,y)=\frac{x^2}{2}\frac{y^3}{3}+B(y)+C(x)$$

با جای‌گذاری مقادیر $x=0$ و $y=0$ در معادله $u(x,y)$ داریم:

$$u(0,0)=B(0)+C(0)=0$$

$$\left.\begin{array}{l} u(x,0)=B(0)+C(x)=x \\ u(0,y)=B(y)+C(0)=\sin y \end{array}\right\} \Rightarrow B(0)+C(x)+B(y)+C(0)=x+\sin y$$

$$C(x)+B(y)=x+\sin y$$

$$u(x,y)=\frac{x^2y^3}{6}+\sin y+x$$

معادلات با مشتقات جزئی مرتبه اول شبه خطی:

معادله با مشتقات جزئی زیر را در نظر بگیرید:

$$p(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x,y,z)$$

برای یافتن جواب این معادله دستگاه زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{dx}{p(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)}$$

طبیعی است دستگاه مذکور دارای دو معادله مستقل است، چنانچه دو معادله مستقل این دستگاه را حل کنیم به جواب‌های به فرم زیر می‌رسیم:

$$u(x,y,z)=C_1 \quad , \quad v(x,y,z)=C_2$$

می‌توان نشان داد جواب کلی معادله مرتبه اول شبه خطی مورد نظر به صورت مقابل است:

$$F(u,v)=0$$

مثال : جواب کلی معادله زیر را پیدا کنید:

$$x^2z^3\frac{dz}{dx}+y^2\frac{dz}{dy}=z+1$$

حل : دستگاه لاگرانژ چنین است:

$$\frac{dx}{x^2z^3}=\frac{dy}{y^2}=\frac{dz}{z+1}\rightarrow\begin{cases}\dfrac{dy}{y^2}=\dfrac{dz}{z+1}\Rightarrow-\dfrac{1}{y}=\text{Ln}(z+1)+c & (۱)\\ \dfrac{dx}{x^2z^3}=\dfrac{dz}{z+1}\Rightarrow\dfrac{dx}{x^2}=\dfrac{z^3dz}{z+1}\Rightarrow\dfrac{dx}{x^2}=\left(z^2-z+1-\dfrac{1}{z+1}\right)dz & \\ \Rightarrow-\dfrac{1}{x}=\dfrac{z^3}{3}-\dfrac{z^2}{2}+z-\text{Ln}(z+1)+k & (۲)\end{cases}$$

پس جواب عمومی چنین است:

$$F\left(\frac{1}{y}+\text{Ln}(z+1)\quad,\quad\frac{1}{x}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^2}{2}+z-\text{Ln}(z+1)\right)=0$$

دسته‌بندی انواع معادلات با مشتقات جزئی مرتبه دوم شبه‌خطی و رسیدن به فرم استاندارد:

معادله با مشتقات جزئی مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$a\frac{\partial^2z}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2z}{\partial y^2}+H\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$$

که در آن a، b و c می‌توانند توابعی از x و y باشند

با تعریف $\Delta=b^2-ac$ می‌گوییم:

۱) اگر $\Delta>0$ باشد معادله مورد نظر از نوع هذلولی‌گون است.

۲) اگر $\Delta=0$ باشد معادله مورد نظر از نوع سهمی گون است.

۳) اگر $\Delta<0$ باشد معادله مورد نظر از نوع بیضی گون است.

این امکان وجود دارد که با تغییر متغیرهای مناسب معادله مذکور را به ساده‌ترین فرم ممکن که اصطلاحاً به فرم کانونیک (استاندارد) موسوم است تبدیل کنیم. برای این منظور نخست معادله مشخصه‌ای به فرم زیر تشکیل می‌دهیم:

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2b\left(\frac{dy}{dx}\right)+c=0$$

ملاحظه می‌شود این معادله مشخصه، خود یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول درجه ۲ می‌باشد.

اگر معادله با مشتقات جزئی اصلی از نوع سهمی‌گون باشد از حل این معادله مشخصه یک جواب برای $\frac{dy}{dx}$ پیدا می‌کنیم که با حل آن یکی از تغییر متغیرهای مورد نیاز برای رسیدن به فرم کانونیک یافت می‌شود و تغییر متغیر دوم را به طریق دلخواهی که البته مستقل از متغیر اول است می‌توان انتخاب کرد اما چنانچه معادله با مشتقات جزئی اصلی از نوع هذلولی گون یا بیضی‌گون باشد از حل معادله مشخصه دو جواب برای $\frac{dy}{dx}$ پیدا می‌شود (دو جواب حقیقی و یا دو جواب مختلط) که با حل آن‌ها تغییر متغیرهای لازم برای رسیدن به فرم کانونیک یافته می‌شود.

مثال : در معادله $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3y^2\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$ روی طبیعت معادله به ازای x و y های مختلف بحث کنید.

حل :

$$a=x\ ;\ 2b=0\ ;\ c=y\Rightarrow \Delta=b^2-ac=0-xy$$

اگر $xy>0$ باشد آن‌گاه $\Delta<0$ است بنابراین معادله از نوع بیضی‌گون است.

اگر $xy<0$ باشد آن‌گاه $\Delta>0$ است بنابراین معادله از نوع هذلولی‌گون است.

اگر x یا y هر کدام برابر صفر باشند $\Delta=0$ است بنابراین معادله از نوع سهمی‌گون است.

مثال : روی طبیعت معادله $e^{2y}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+ye^{x+y}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+xe^{2x}\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ در حالت مختلف بحث کنید.

حل :

$$a=e^{2y}\ ;\ 2b=ye^{x+y}\ ;\ c=xe^{2x}$$

$$\Delta=b^2-ac=\frac{y^2}{4}e^{2x+2y}-xe^{2x+2y}=\underbrace{e^{2x+2y}}_{\text{همواره مثبت}}\left\{\frac{y^2}{4}-x\right\}$$

اگر $\dfrac{y^2}{4}-x>0$ باشد معادله مورد نظر از نوع هذلولی گون است.

اگر $\dfrac{y^2}{4}-x=0$ باشد معادله از نوع سهمی‌گون است.

اگر $\dfrac{y^2}{4}-x<0$ باشد معادله از نوع بیضی‌گون است.

مثال : تغییر متغیرهای لازم برای رسیدن به فرم کانونیک معادله با مشتقات جزئی زیر را مشخص کنید.

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad a=x^2\ ;\ 2b=0\ ;\ c=4$$

حل : معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم:

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2b\left(\frac{dy}{dx}\right)+c=0\Rightarrow x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+4=0\Rightarrow\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=-\frac{4}{x^2}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2i}{x}\\[2mm]\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-2i}{x}\end{cases}$$

معادله اول : $dy=\dfrac{2idx}{x}\Rightarrow y=2iLnx+C$

معادله دوم : $dy=\dfrac{-2idx}{x}\Rightarrow y=-2iLnx+k$

لذا تغیر متغیرهای لازم برای رسیدن به فرم کانونیک عبارتند از:

$$p=y-2i\,Ln\,x \qquad q=y+2i\,Ln\,x$$

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول خطی با ضرایب ثابت از نوع همگن

"با فرض آن که c , b , a اعداد ثابت هستند برای حل معادله $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}+cz=0$ با تعریف اپراتورهای $D'=\frac{\partial}{\partial y}$ و $D=\frac{\partial}{\partial x}$

می‌توان نوشت $(aD+bD'+c)z=0$ و می‌توان نشان داد جواب کلی معادله مورد نظر چنین است:

$z=e^{-\frac{c}{a}x}.\varphi(ay-bx)$ با فرض $a\neq 0$

یا

$z=e^{-\frac{c}{b}y}.\varphi(ay-bx)$ با فرض $b\neq 0$

(φ تابع اختیاری است.)

مثال : جواب کلی معادله $3\frac{\partial z}{\partial x}-2\frac{\partial z}{\partial y}+5=0$ را بنویسید.

حل : $z=e^{-\frac{5}{3}x}\varphi(3y+2x)$ یا $z=e^{-\frac{5}{-2}y}\varphi(3y+2x)$

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دوم خطی با ضرایب ثابت:

با فرض آنکه ... , b , a اعداد ثابتند برای حل معادله با مشتقات جزئی

$$a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+c\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+d\frac{\partial z}{\partial x}+e\frac{\partial z}{\partial y}+fz=0$$

با تعریف اپراتورهای D و D' می‌توان نوشت:

$$\left(\underbrace{aD^2+bD'^2+cDD'+dD+eD'+f}_{H(D,D')}\right)z=0$$

حال چنانچه بتوان عبارت $H(D,D')$ به حاصل‌ضرب دو عامل درجه اول برحسب D و D' تجزیه کرد.

$$H(D,D')=(\alpha D+\beta D'+\gamma)(mD+nD'+\ell)$$

آن‌گاه پایه جواب معادله مورد نظر چنین است:

پایه جواب اول		پایه جواب دوم
$e^{-\frac{\gamma}{\alpha}x}\varphi(\alpha y-\beta x)\quad \alpha\neq 0$	و	$e^{-\frac{\ell}{m}x}\psi(my-nx)\quad m\neq 0$
$e^{-\frac{\gamma}{\beta}y}\varphi(\alpha y-\beta x)\quad \beta\neq 0$		$e^{-\frac{\ell}{n}y}\psi(my-nx)\quad n\neq 0$

اگر در تجزیه $H(D,D')$ به وضعیت مقابل رسیدیم: $H(D,D')=(\alpha D+\beta D'+\gamma)^2$

آن‌گاه پایه‌های جواب به فرم زیر خواهد بود:

پایه جواب اول		پایه جواب دوم
$e^{-\frac{\gamma}{\alpha}x}\varphi(\alpha y-\beta x)\quad \alpha\neq 0$	و	$xe^{-\frac{\gamma}{\alpha}x}\psi(\alpha y-\beta x)\quad \alpha\neq 0$
$e^{-\frac{\gamma}{\beta}y}\varphi(\alpha y-\beta x)\quad \beta\neq 0$		$ye^{-\frac{\gamma}{\beta}}\psi(\alpha y-\beta x)\quad \beta\neq 0$

مثال : جواب کلی معادلات زیر را مشخص کنید.

1) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}-6\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

حل :

$$H(D,D')=D^2-DD'-6D'^2=(D-3D')(D+2D')$$

پس جواب عمومی به صورت زیر است:

$$u=e^{-\frac{0}{1}x}\varphi(1y+3x)+e^{-\frac{0}{1}x}\psi(1y-2x)$$

2) $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-12\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+9\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

حل :

$$H(D,D')=4D^2-12DD'+9D'^2=(2D-3D')^2$$

پس جواب عمومی به صورت زیر است:

$$u=\varphi(2y+3x)+y\psi(2y+3x) \quad \text{یا} \quad u=\varphi(2y+3x)+x\psi(2y+3x)$$

3) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+3\frac{\partial u}{\partial x}-3\frac{\partial u}{\partial y}=0$

حل :

$$H(D,D')=D^2-DD'+3D-3D'=D(D+3)-D'(D+3)=(D-D')(D+3)$$

پس جواب عمومی به صورت زیر است:

$$u=e^{-\frac{0}{1}}\varphi(x+y)+e^{-\frac{3}{1}x}\varphi(1y-0x)$$

(جواب را برحسب $z=x+iy$; $\bar{z}=x-iy$ بنویسید.)

4) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y}=0$

حل :

$$H(D,D')=D^2+D'^2=(D-iD')(D+iD')$$

پس جواب عمومی به صورت زیر است:

$$u=\varphi(1y+ix)+\psi(1y-ix)$$

$$u=\varphi(i(x-iy))+\psi(-iz)=F(\bar{z})+G(z)$$

حل معادلات با مشتقات جزئی با استفاده از تبدیل لاپلاس:

همان‌طوری که می‌دانید تعریف تبدیل لاپلاس به گونه‌ای است که تابع با متغیر زمان را تبدیل به تابعی با متغیر s می‌کند. بنابراین با توجه به قضایای تبدیل لاپلاس طبیعی است برای تابعی مانند $u(x,t)$ اگر تبدیل لاپلاس این تابع را $U(x,s)$ بنامیم داریم:

1) $L\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\}=\frac{\partial}{\partial x}U(x,s)$

$$2)\ L\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x,s)$$

$$3)\ L\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\}=sU(x,s)-u(x,0)$$

$$4)\ L\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\}=s^2U(x,s)-su(x,0)-u_t(x,0)$$

$$5)\ L\{tu(x,t)\}=-\frac{\partial}{\partial s}(U(x,s))$$

$$6)\ L\left\{t\frac{\partial u}{\partial x}\right\}=-\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial}{\partial x}U(x,s)\right)$$

$$7)\ L\left\{x\frac{\partial u}{\partial t}\right\}=x\left(sU(x,s)-u(x,0)\right)$$

مثال : چنانچه $L\{u(x,t)\}=U(x,s)$ فرض شود تبدیل لاپلاس معادله دیفرانسیل $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial t}+u=xt\\ u(x,0)=0\end{cases}$ کدام است؟

حل : از دو طرف معادله دیفرانسیل تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$\frac{\partial}{\partial x}U+\big(sU-\underbrace{\cancel{u(x,0)}}_{0}\big)+U=x\frac{1}{s^2}\ \rightarrow\ \frac{\partial U}{\partial x}+(s+1)U=\frac{x}{s^2}$$

مثال : معادله دیفرانسیل همراه با شرایط کمکی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0\\ u(x,0)=u_t(x,0)=0\\ u(0,t)=\sin t\\ \lim\limits_{x\to+\infty}u(x,t)=\text{محدود}\end{cases}$$

حل : از دو طرف معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x,s)-\Big(s^2U(x,s)-s\,\underbrace{\cancel{u(x,0)}}_{0}-u_t\,\underbrace{\cancel{(x,0)}}_{0}\Big)=0\ \Rightarrow\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-s^2U=0\ \Rightarrow\ \boxed{\lambda^2-s^2=0\Rightarrow\lambda=\pm s}$$

$$U(x,s)=A(s)e^{sx}+B(s)e^{-sx}$$

از شرایط مرزی داده شده تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$u(0,t)=\sin t\Rightarrow U(0,s)=\frac{1}{1+s^2}\qquad \lim_{x\to+\infty}u(x,t)=\text{محدود}\rightarrow \underset{x\to+\infty}{U(x,s)}=\text{محدود}$$

با اعمال شرط ($\underset{x\to+\infty}{U(x,s)}=\text{محدود}$) نتیجه می‌گیریم باید $A(s)=0$ باشد، لذا:

$$U(x,s)=B(s)e^{-sx}$$

و با اعمال شرط $U(0,s)=\dfrac{1}{1+s^2}$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{1+s^2}=B(s)e^{\circ}\Rightarrow U(x,s)=\frac{1}{1+s^2}e^{-sx}\xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس}}u(x,t)=u_x(t)\sin(t-x)$$

یادآوری:

$$\boxed{L^{-1}\left\{e^{-cs}F(s)\right\}\ \underline{\text{قضیه دوم انتقال}}\ u_c(t)f(t-c)}$$

روش جداسازی متغیرها:

فرض کنید یک معادله با مشتقات جزئی برای تابعی مانند $u(x,y)$ داده شده باشد. با این فرض که شاید بتوان این تابع را به صورت $u(x,y)=A(x).B(y)$ نوشت u را به صورت جداسازی شده در داخل معادله با مشتقات جزئی قرار می‌دهیم. چنانچه حاصل کار را در نهایت بتوان به صورت $H(x)=L(y)$ نوشت که در آن H تابع A (x) و L تابع B (y) باشد، آن‌گاه فرض انجام شده برای u قابل قبول بوده و ناگزیریم بنویسیم:

$H(x)=L(y)=$ ثابت

و بدین ترتیب به دو معادله دیفرانسیل معمولی برای A (x) و B (y) می‌رسیم که با حل آن می‌توان تابع u رامشخص کرد.

مثال : با استفاده از روش جداسازی متغیرها جواب معادله با مشتقات جزئی $u_x+u_y=2(x+y)u$ را به‌دست آورید.

حل :

با فرض: $u(x,y)=A(x)B(y)$

با قرار دادن آن در معادله داریم:

$$A'(x)B(y)+A(x).B'(y)=2(x+y)A(x).B(y)$$

با تقسیم دو طرف بر AB داریم:

$$\frac{A'}{A}+\frac{B'}{B}=2(x+y)\Rightarrow \underbrace{\frac{A'}{A}-2x}_{\text{فقط x داریم}}=\underbrace{2y-\frac{B'}{B}}_{\text{فقط y داریم}}=C$$

به عبارت دیگر دو عبارت تنها در صورتی می‌توانند با هم برابر باشند که هر دو تابع ثابتی مانند C باشند.

داریم:

$$\begin{matrix}\dfrac{A'}{A}=2x+C\Rightarrow LnA=x^2+Cx+k_1\\ \dfrac{B'}{B}=2y-C\Rightarrow LnB=y^2-Cy+k_2\end{matrix}\Rightarrow\begin{cases}A=e^{x^2+Cx+k_1}\\ B=e^{y^2-Cy+k_2}\end{cases}\Rightarrow\ u=A.B=e^{x^2+Cx+k_1+y^2-Cy+k_2}$$

مثال : چنانچه معادله لاپلاس دو بعدی در مختصات قطبی به‌صورت $\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0$ بیان شود با استفاده از روش جداسازی متغیرها به چه معادلات دیفرانسیلی برخورد می‌کنیم.

حل :

$$A''B+\frac{1}{r}A'.B+\frac{1}{r^2}AB''=0 \xrightarrow{\text{تقسیم بر AB می‌کنیم}} \frac{A''}{A}+\frac{1}{r}\frac{A'}{A}+\frac{1}{r^2}\frac{B''}{B}=0 \xrightarrow{\text{در } r^2 \text{ ضرب می‌کنیم}} \underbrace{r^2\frac{A''}{A}+r\frac{A'}{A}}_{\text{فقط دارای } r}=\underbrace{\frac{-B''}{B}}_{\text{فقط دارای } \theta}=C$$

$$\begin{cases} r^2\frac{A''}{A}+r\frac{A'}{A}=C \Rightarrow r^2A''+rA'-CA=0 & \text{معادله کوشی ـ اویلر} \\ \frac{-B''}{B}=C \Rightarrow B''+CB=0 & \text{معادله با ضرایب ثابت} \end{cases}$$

یادآوری:

$ax^2y''+bxy'+cy=0$ معادله‌کوشی اویلر

$x^2y''+xy'+\left(\lambda^2x^2-v^2\right)y=0$ معادله بسل

$\left(1-x^2\right)y''-2xy''+m(m+1)y=0$ معادله لژاندر

یادآوری از مسایل مقدار ویژه:

برخی مواقع یک معادله دیفرانسیل همگن همراه با شرایط کمکی همگن داده می‌شود که در آن یک پارامتر مانند λ موجود است. طبیعی است به واسطه همگن بودن معادله و شرایط مرزی آن همواره یک جواب بدیهی صفر برای مساله موجود است اما ممکن است بتوان با تعیین λ به طوری خاص برای مساله مورد نظر جواب‌های غیربدیهی نیز پیدا کرد. در چنین شرایطی به آن λها مقادیر ویژه مساله و به توابع جواب توابع ویژه مساله گفته می‌شود.

دقت کنید معمولاً در حین انجام این کار مجبوریم شرط خاصی روی λها قرار داده و بعد حل را ادامه دهیم که اگر آن شرط خاص مناسب نباشد، در انتهای کار به جواب‌های بدیهی می‌رسیم که البته مورد نظر نیست. (برای یافتن مقدار ویژه باید فرض دیگر را در مساله قرار داده و دوباره به بررسی معادلات بپردازیم. معمولاً مقدار λ با توجه به شرایط مرزی به راحتی قابل حدس زدن است.)

مثال : مقادیر ویژه و توابع ویژه مساله زیر را پیدا کنید:

(راهنمایی: فرض بر آن است که توابع ویژه مساله از جنس sin و cos می‌باشد).

$$\begin{cases} y''+2y'+\lambda y=0 \\ y(0)=y(1)=0 \end{cases}$$

حل :

معادله مشخصه : $m^2+2m+\lambda=0 \Rightarrow m=-1\pm\sqrt{1-\lambda}$

چون فرض مساله در سینوسی یا کسینوسی بودن توابع ویژه است لذا با فرض $1-\lambda<0$ داریم:

$$m=-1\pm\sqrt{\lambda-1}\,i$$

لذا جواب عمومی چنین است:

$$y=Ae^{-x}\sin\left(\sqrt{\lambda-1}\,x\right)+Be^{-x}\cos\left(\sqrt{\lambda-1}\,x\right)$$

با اعمال شرط $y(0)=0$ به‌دست می‌آید $B=0$ و با اعمال شرط $y(1)=0$ به‌دست می‌آید:

$$0=Ae^{-1}\sin\left(\sqrt{\lambda-1}\right)$$

اگر بخواهیم A را مساوی صفر قرار دهیم به جواب بدیهی $y=0$ می‌رسیم که البته یک جواب مساله است ولی ما به دنبال مقادیر ویژه و توابع ویژه هستیم:

$$\sin\left(\sqrt{\lambda-1}\right)=0 \Rightarrow \sqrt{\lambda-1}=k\pi \Rightarrow \underbrace{\lambda=k^2\pi^2+1}_{\text{مقادیر ویژه مساله}}$$

و لذا داریم: $y=Ae^{-x}\sin(k\pi x)$

معادلات فیزیکی موج ـ حرارت و لاپلاس از نوع همگن همراه با شرایط مرزی همگن:

موج : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

حرارت: $\dfrac{\partial u}{\partial t}=k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

لاپلاس
$$\begin{cases} \text{دکارتی} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \\ \text{قطبی} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0 \end{cases}$$

هر سه معادله مذکور (در هر دستگاه مختصات) با روش جداسازی متغیرها قابل حل است در زمان استفاده از این روش در انتهای مساله به معادلات دیفرانسیل معمولی برخورد می‌کنیم که برای حل آن‌ها نیاز داریم تکلیف ثابت مربوط به روش جداسازی متغیرها را معلوم کنیم، مرسوم است با یک فرض دلخواه راجع به آن ثابت که بتوان جواب‌های معادلات دیفرانسیل حاصله را پیدا کرد به حل آن معادلات دیفرانسیل بپردازیم و سپس با اعمال شرایط مرزی همگن داده شده در مساله تکلیف آن ثابت را به طور دقیق مشخص کنیم.

دقت کنید اگر فرض صورت گرفته برای ثابت مذکور مناسب نباشد به جواب‌های بدیهی یا غیرقابل قبول خواهیم رسیم که مورد نظر ما نیست و باید آن فرض را عوض کرده و دوباره مساله را با فرض جدید حل کنیم.

در انتهای کار جواب مساله به صورت حاصل‌ضرب چند تابع پیدا می‌شود که در این‌جا ثابت‌هایی نیز موجودند و بنا به خطی بودن معادلات اصلی‌مان هر مجموعی از این جواب‌ها به عنوان جواب مساله قابل قبول است. لذا در نهایت جواب وابسته به طبیعت مساله و طبیعت مقادیر ویژه مساله، در قالب سیگما یا انتگرال بیان می‌شود و با اعمال شرایط کمکی داده شده با استفاده از بحث سری‌های فوریه یا انتگرال‌های فوریه یا ... ثابت‌های مذکور را پیدا و جواب نهایی را گزارش می‌دهیم.

دقت کنید در بسیاری مواقع برای یافتن جواب صحیح بدون نیاز به اعمال فوق می‌توان از سه بحث زیر استفاده کرد:

الف) جواب صحیح باید شرایط مرزی و اولیه مساله را ارضا کند.

ب) جواب صحیح باید روی حالت‌های حدی متغیرهای ممکنه همواره شرط محدود ماندن را اقناع کند.

ج) جواب صحیح البته باید معادله با مشتقات جزئی داده شده را ارضا کند.

مثال : برای معادله حرارت زیر ساختار جواب مساله چگونه خواهد بود؟

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

۱) $u(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2\pi^2 t} \cos n\pi x$

۲) $u(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{n^2\pi^2 t} \cos n\pi x$

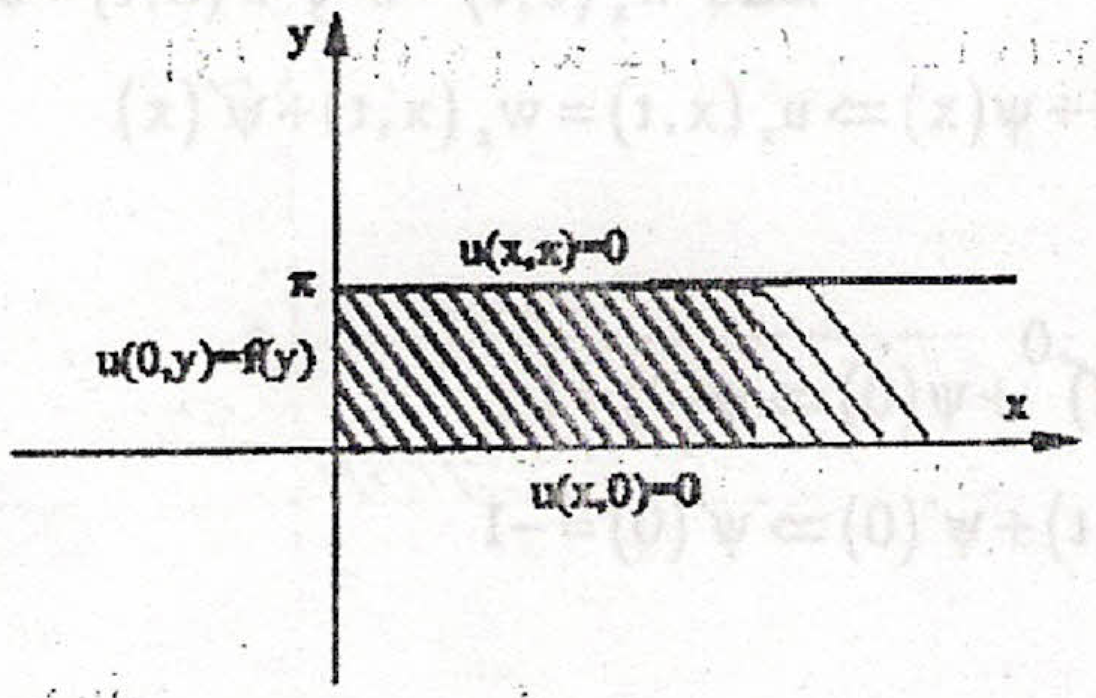
۳) $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x$

۴) $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{n^2\pi^2 t} \sin n\pi x$

حل : شرایط محدود بودن برای $t \to \infty$ وجود ترم‌های $e^{n^2\pi^2 t}$ را منتفی می‌کند والبته از آن‌جا که $\lim_{t\to\infty} e^{-n^2\pi^2 t} = 0$ است فقط گزینه‌های *1* و *3* کاندیدای جواب باقی می‌ماند هم‌چنین برای اقناع شرایط مرزی همگن داده شده روی u_x گزینه‌های شامل $\cos n\pi x$ که در مشتق آن‌ها نسبت به x $\sin n\pi x$ باقی می‌ماند به عنوان جواب قابل قبول است. گزینه‌های شامل $\sin n\pi x$ که در مشتق آن‌ها $\cos n\pi x$ ظاهر می‌شود و $\cos n\pi(1)$ و $\cos n\pi(0)$ مخالف صفر است، مردودند پس گزینه ۱ صحیح است.

مثال : در حل معادله لاپلاس در هندسه نشان داده شده به همراه شرایط مرزی موجود چنانچه جواب مساله ساختاری مانند:

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n e^{-nx} + B_n e^{nx}\right)\left(C_n \sin(ny) + D_n \cos(ny)\right)$$



داشته باشد تکلیف ضرایب A_n، B_n، C_n و D_n را مشخص کرده و برای حالت‌های $f(y)=1$ و $f(y) = \sin 3y + 2\sin 4y$ وضعیت نهایی جواب را مشخص کنید.

حل : اولاً وقتی $x \to +\infty$ جواب باید محدود باقی بماند لذا وجود e^{nx} منتفی است. لذا باید $B_n = 0$ باشد از طرفی برای اقناع شرایط $u(x,0) = u(x,\pi) = 0$ وجود $\cos ny$ در جواب منتفی است لذا باید $D_n = 0$ باشد. پس باید:

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n e^{-nx} \sin ny$$

الف) $u(0,y) = 1 = f(y)$ باشد با اعمال این شرط به‌دست می‌آید:

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \sin ny$$

باید E_n ضرایب سری فوریه سینوسی تابع $f(y)=1$ در فاصله $0 \le y \le \pi$ باشد یعنی:

$$E_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1 \sin ny dy = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\right)\cos ny\Big|_0^{\pi} = \frac{-2}{n\pi}(\cos n\pi - 1)$$

$$u(x,y) = \sum_{n=0} \frac{-2}{\pi}\{\cos n\pi - 1\} \sin ny$$

ب) $u(0,y)=\sin 3y+2\sin 4y=f(y)$ باشد با اعمال این شرط به‌دست می‌آید:

$$\sin 3y+2\sin 4y=\sum_{n=0}^{\infty}E_n \sin ny$$

پس باید $E_4=2$ و $E_3=1$ و بقیه E_nها صفرباشند لذا:

$$u(x,y)=1e^{-3x}\sin 3y+2e^{-4x}\sin 4y$$

همگن کردن یک مساله غیرهمگن:

برخی مواقع یک معادله با مشتقات جزئی همراه با شرایط مرزی و اولیه خاص داده می‌شود که خود معادله و شرایط مرزی آن از نوع همگن نمی‌باشد. این امکان وجود دارد که به طریق مناسب معادله مورد نظر به یک مساله جدید که در آن معادله حاصله و شرایط مرزی موجود از نوع همگن می‌باشد تبدیل شود.

مثال : به ازای چه تابعی از $\psi(x)$ و $u(x,t)=w(x,t)+\psi(x)$، مساله $u_t=4u_{xx}+\sin x$ با شرایط $u(x,0)=f(x)$ و $u(0,t)=1$ و $u_x(0,t)=-1$ به معادله همگن با شرایط مرزی همگن برای تابع w تبدیل می‌شود.

حل : $u(x,t)=w(x,t)+\psi(x)$ را داخل معادله اصلی قرار می‌دهیم:

$$w_t=4\left(w_{xx}+\psi''\right)+\sin x$$

اگر قرار است معادله حاصله برای w همگن شود باید $4\psi''+\sin x=0$ شود.

از طرفی اگر قرار است شرایط مرزی حاکم بر w همگن باشد باید $w(0,t)=0$ و $w_x(0,t)=0$ باشد.

$$u(x,t)=w(x,t)+\psi(x)\Rightarrow u_x(x,t)=w_x(x,t)+\psi'(x)$$

با اعمال شرایط مرزی داریم:

$$\cancel{u(0,t)}^{\,1}=\cancel{w(0,t)}^{\,0}+\psi(0)\Rightarrow\psi(0)=1$$

$$u_x(0,t)=w_x(0,t)+\psi'(0)\Rightarrow\psi'(0)=-1$$

حال می‌نویسیم:

$$4\psi''+\sin x=0\Rightarrow\psi''=-\frac{\sin x}{4}\Rightarrow\psi'=\frac{\cos x}{4}+A\Rightarrow\psi=\frac{\sin x}{4}+Ax+B$$

با اعمال شرایط پیدا شده برای ψ داریم:

$$\psi(0)=1\Rightarrow B=1 \qquad \psi'(0)=-1\Rightarrow\frac{1}{4}+A=-1\Rightarrow A=-\frac{5}{4}$$

لذا:

$$\psi(x)=\frac{\sin x}{4}-\frac{5}{4}x+1$$

پیدا کردن جواب حالت ماندگار یک معادله با مشتقات جزئی

برخی مواقع تابع مورد نظر در یک معادله با مشتقات جزئی به گونه‌ای است که با توجه به گذشت زمان‌های طولانی جواب حاصله مستقل از زمان می‌باشد این جواب اصطلاحاً جواب حالت ماندگار گفته می‌شود.

مثال : معادله ناهمگن انتقال حرارت در یک بعد به همراه شرایط زیر را در نظر بگیرید:
جواب حالت ماندگار مساله چیست؟

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a = \dfrac{\partial u}{\partial t} \\ u(0,t) = 10 \\ u_x(1,t) = 2 \end{cases}$$

حل :

$$u_{ss} = \lim_{t \to \infty} u(x,t)$$

در حالت ماندگار $\dfrac{\partial}{\partial t} = 0$ است لذا:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -a \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -ax + C_1 \Rightarrow u = -\frac{ax^2}{2} + C_1 x + C_2$$

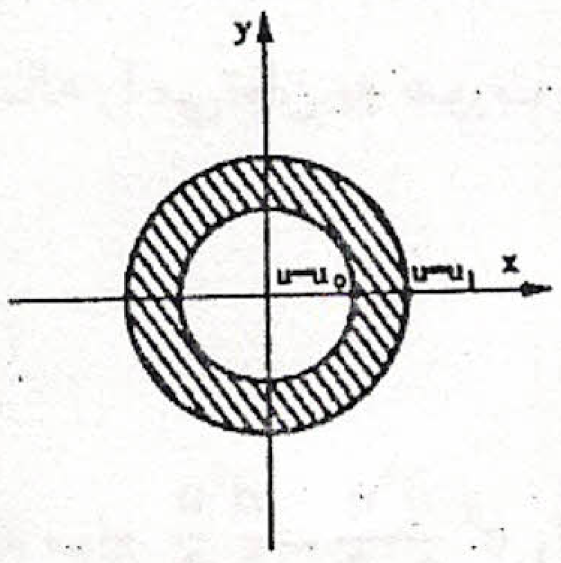
با اعمال شرایط مرزی داده شده داریم:

$$u(0,t) = 10 \Rightarrow C_2 = 10 \qquad u_x(1,t) = 2 \Rightarrow -a(1) + C_1 = 2 \Rightarrow C_1 = a + 2$$

پس $u_{ss}(x) = -\dfrac{a}{2}x^2 + (a+2)x + 10$.

حل معادله لاپلاس $(\nabla^2 u = 0)$ در دو هندسه خاص با شرایط مرزی ثابت

الف) می‌توان نشان داد حل معادله لاپلاس $(\nabla^2 u = 0)$ در مساله زیر به صورت زیر نوشته می‌شود:



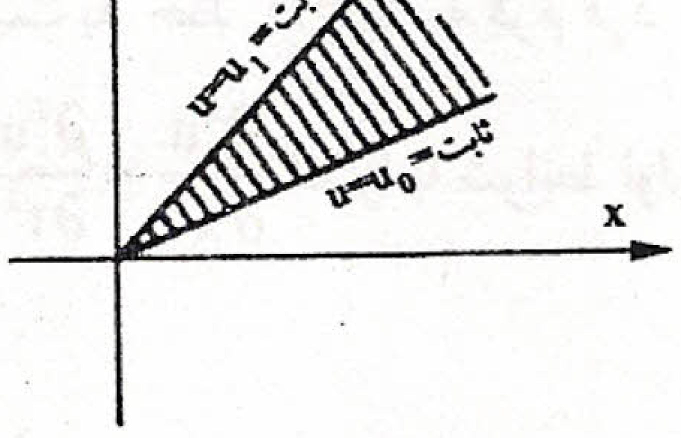
$$u = A\,\mathrm{Ln}\, r + B \qquad \text{یا} \qquad u = \frac{A}{2}\mathrm{Ln}\left(x^2 + y^2\right) + B$$

A و B با اعمال شرایط مرزی محاسبه می‌شوند.

ب) می‌توان نشان داد حل معادله لاپلاس $\nabla^2 u = 0$ در مساله زیر به صورت زیر خواهد بود.

$$u = A\theta + B \qquad \text{یا} \qquad u = A\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + B$$

A و B با اعمال شرایط مرزی محاسبه می‌شوند.

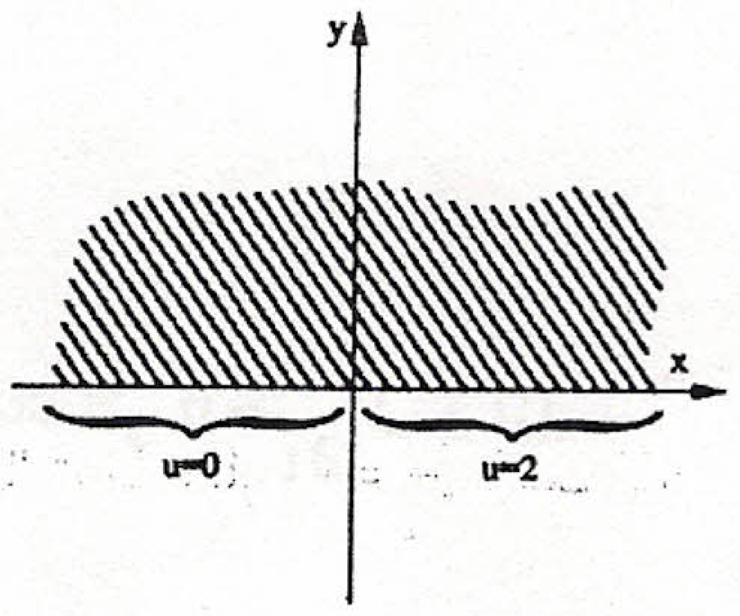


(دقت کنید در هر دو بحث فوق شرایط مرزی روی هر دو مرز عدد ثابت است).

مثال : جواب مساله زیر را در (3 و 2) محاسبه کنید.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad ; \quad -\infty < x < +\infty \quad ; \quad y \ge 0 \qquad u(x,0)=\begin{cases}0 & x<0\\ 2 & x>0\end{cases}$$

حل : با توجه به نکته گفته شده داریم:



$$u=A\theta+B$$

$$\theta=0 \Rightarrow u=2 \Rightarrow 2=A(0)+B \Rightarrow B=2$$

$$\theta=\pi \Rightarrow u=0 \Rightarrow 0=A(\pi)+2 \Rightarrow A=-\frac{2}{\pi}$$

پس:

$$u=-\frac{2}{\pi}\theta+2 \Rightarrow u(x,y)=-\frac{2}{\pi}\mathrm{Arc}\tan\left(\frac{y}{x}\right)+2 \Rightarrow u(2,3)=-\frac{2}{\pi}\mathrm{Arc}\tan\left(\frac{3}{2}\right)+2$$

حل دالامبر معادله موج

معادله موج $c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ را در نظر بگیرید می‌توان نشان داد با شرایط اولیه داده شده در زیر:

$$\begin{cases}u(x,0)=f(x)\\ u_t(x,0)=g(x)\end{cases}$$

جواب مساله را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\{f(x+ct)+f(x-ct)\}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(p)\,dp$$

توجه:

۱) معادله موج $c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ را با شرایط اولیه و مرزی داده شده در زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{cases}u(x,0)=f(x)\\ u_t(x,0)=g(x)\\ u(0,t)=u(L,t)=0\end{cases}$$

دقت کنید در حل معادله موج در محیط متناهی فوق می‌توان همان حل دالامبر گفته شده را مورد استفاده قرار داد. فقط لازم است توابع f و g نسبت به خط $x=0$ به فرم فرد گسترش یافته و برای توابع حاصله گسترش متناوب با دوره تناوب 2L را اعمال کنیم.

۲) معادله موج $c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ را با شرایط اولیه و مرزی داده شده در زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{cases}u(x,0)=f(x)\\ u_t(x,0)=g(x)\\ u_x(0,t)=u(L,t)=0\end{cases}$$

دقت کنید در حل معادله موج در محیط متناهی فوق می‌توان همان حل دالامبر گفته شده را مورد استفاده قرار داد. فقط لازم است توابع f و g نسبت به خط $x=L$ به فرم فرد و نسبت به خط $x=0$ به فرم زوج گسترش یافته و برای توابع حاصله گسترش متناوب با دوره تناوب $4L$ را اعمال کنیم.

مثال : معادله موج زیر را در نظر بگیرید.

$$4u_{xx} = u_{tt}$$

$$u(x,0)=\begin{cases} x & 0<x<\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3}<x<1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t(x,0)=0 \\ u_x(0,t)=u(1,t)=0 \end{cases}$$

آن‌گاه $u\left(\dfrac{1}{2},4\right)$ چقدر می‌شود؟

حل : داریم:

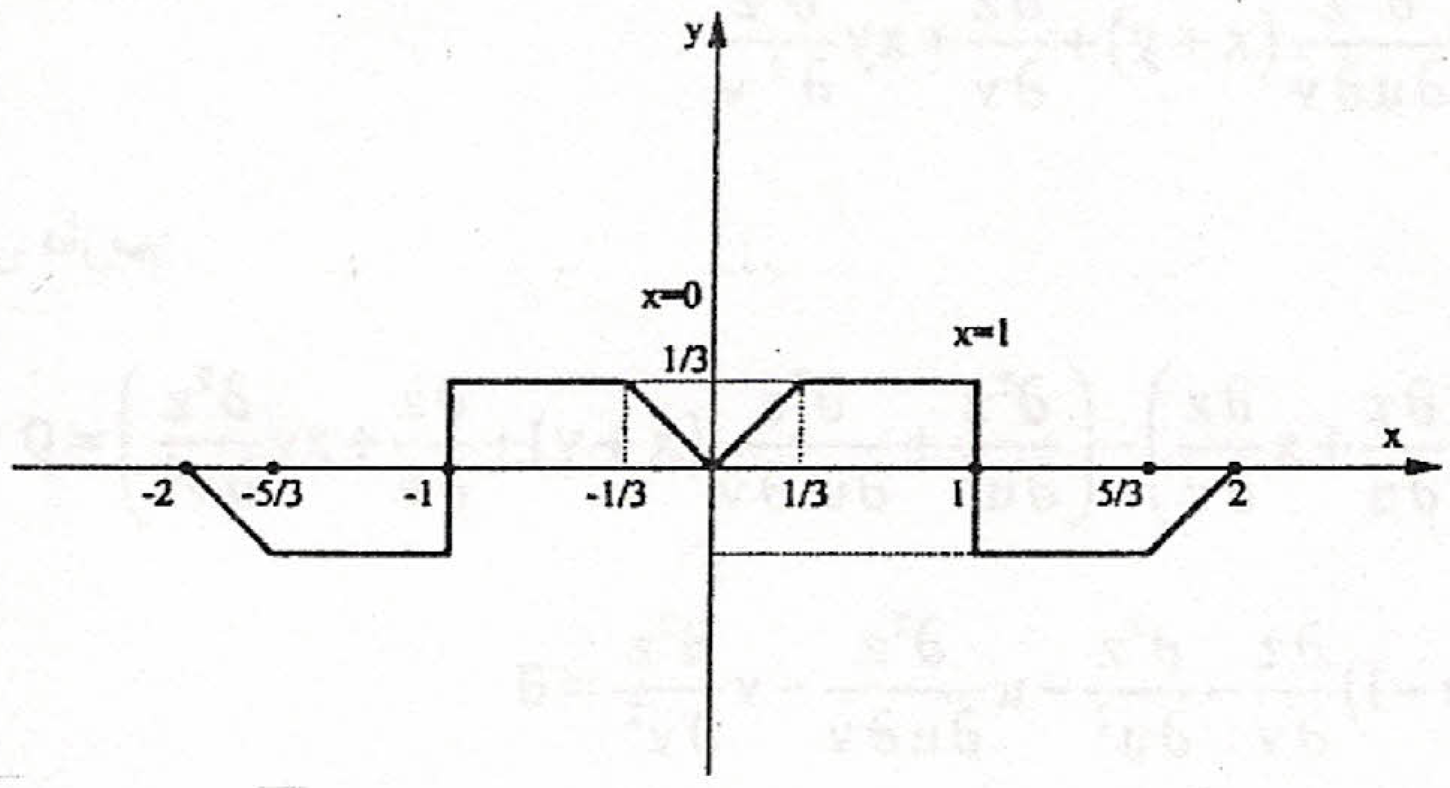
$$u_x(0,t)=u(1,t)=0 \qquad C=2$$

$$f(x)=\begin{cases} x & 0<x<\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3}<x<1 \end{cases} \qquad g(x)=0$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\{f(x+2t)+f(x-2t)\} \Rightarrow u\left(\frac{1}{2},4\right)=\frac{1}{2}\left\{f\left(\frac{1}{2}+8\right)+f\left(\frac{1}{2}-8\right)\right\}=\frac{1}{2}\{f(8.5)+f(-7.5)\}$$

با توجه به نکته گفته شده گسترش مناسب برای $f(x)$ چنین است:

$$u\left(\frac{1}{2},4\right)=\frac{1}{2}\{f(0.5)+f(0.5)\}=f(0.5)=\frac{1}{3}$$



مثال‌هایی دیگر از مشتقات جزئی

مثال : معادله با مشتقات جزئی زیر را با توجه به شرایط کمکی داده شده حل کنید:

حل :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=x^2\cos y+y^2 \\ u(x,0)=\cos x \\ u(0,y)=e^y+y \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 \cos y + y^3 \xrightarrow[\text{نسبت به } x]{\text{انتگرال‌گیری}} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^3}{3}\cos y + y^3 x + A(y) \xrightarrow[\text{نسبت به } y]{\text{انتگرال‌گیری}} u = \frac{x^3}{3}\sin y + \frac{y^4}{4}x + B(y) + C(x)$$

با اعمال شرایط کمکی داده شده داریم:

$$u(x,0) = \cos x \Rightarrow \cos x = B(0) + C(x) \Rightarrow C(x) = \cos x - B(0) \Rightarrow C(0) = 1 - B(0) \Rightarrow C(0) + B(0) = 1$$

$$u(0,y) = e^y + y \Rightarrow e^y + y = B(y) + C(0) \Rightarrow B(y) = e^y + y - C(0)$$

پس به‌دست می‌آید:

$$u = \frac{x^3}{3}\sin y + \frac{y^4}{4}x + e^y + y - C(0) + \cos x - B(0) \Rightarrow \frac{x^3}{3}\sin y + \frac{y^4}{4}x + e^y + y + \cos x - 1$$

مثال: معادله با مشتقات جزئی $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$ را با تغییر متغیرهای $v = xy$ و $u = x + y$ برحسب مشتقات نسبی z برحسب u و v بازنویسی کنید.

حل :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}.(1) + \frac{\partial z}{\partial v}(y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}.(1) + \frac{\partial z}{\partial v}(x)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u} + y\frac{\partial z}{\partial v}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}.\overset{1}{\cancel{\frac{\partial u}{\partial y}}} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}.\overset{x}{\cancel{\frac{\partial v}{\partial y}}} + \frac{\partial z}{\partial v} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial v.\partial u}.\overset{1}{\cancel{\frac{\partial u}{\partial y}}} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.\overset{x}{\cancel{\frac{\partial v}{\partial y}}}\right)y$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}(x+y) + \frac{\partial z}{\partial v} + xy\frac{\partial^2 z}{\partial^2 v}$$

با قرار دادن سه عبارت به‌دست آمده در معادله اصلی داریم:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u} + y\frac{\partial z}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial u} + x\frac{\partial z}{\partial v}\right) - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u.\partial v}(x+y) + \frac{\partial z}{\partial v} + xy\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2\frac{\partial z}{\partial u} + (u-1)\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - u\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - v\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0$$

مثال : معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی حاصل از حذف تابع اختیاری F در رابطه $F(xz, z-y) = 0$ را بیابید.

حل : Z تابعی از x, y فرض شده است.

$$u = xz \quad ; \quad v = z - y$$

لذا معادله با مشتقات جزئی مورد نظر چنین است:

$$\begin{vmatrix} z + x\frac{\partial z}{\partial x} & x\frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} - 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow z\frac{\partial z}{\partial y} - z + x\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} - x\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow \boxed{z\frac{\partial z}{\partial y} - x\frac{\partial z}{\partial x} = z}$$

مثال : مقدار k یک ثابت حقیقی فرض شده است، در وضعیت‌های مختلف k روی طبیعت معادله با مشتقات جزئی زیر بحث کنید.

$$(3-k)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2k\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+4\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

حل : داریم:

$$a=3-k \quad ; \quad b=k \quad ; \quad c=1$$

$$\Delta : b^2-ac=k^2+k-3$$

برای تعیین علامت Δ می‌نویسیم:

$$k^2+k-3=0 \Rightarrow k=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$$

لذا ملاحظه می‌شود:

k		$\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$	
Δ	+	0	−	0	+
طبیعت معادله	هذلولی‌گون	سهموی‌گون	بیضی‌گون	سهموی‌گون	هذلولی‌گون

مثال : معادله با مشتقات جزئی $\left(y^2+2x\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2x\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}=0$ (با فرض $y^2\neq 2x$) اولا روی طبیعت معادله بحث کنید و ثانیاً تغییر متغیرهای لازم برای رسیدن به فرم کانونیک را پیدا کنید.

حل : معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم.

$$y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\left(y^2+2x\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)+2x=0 \quad \text{جمع ضرایب صفر است} \quad \begin{cases}\frac{dy}{dx}=1\\[4pt] \frac{dy}{dx}=\frac{2x}{y^2}\end{cases} \Rightarrow$$

هر دو جواب معادله مشخصه از جنس حقیقی شده (با توجه به شرط $y^2\neq 2x$) لذا معادله از نوع هذلولی‌گون است.

حال داریم:

$$\frac{dy}{dx}=1\Rightarrow dy=dx\Rightarrow y=x+C_1\Rightarrow y-x=C_1$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{y^2}\Rightarrow y^2dy=2xdx\Rightarrow\frac{y^3}{3}-x^2=C_2$$

لذا تغییر متغیرهای لازم برای رسیدن به فرم استاندارد چنین است:

$$u=y-x \quad ; \quad v=\frac{y^3}{3}-x^2$$

مثال : معادله با مشتقات جزئی زیر را در نظر بگیرید معادله حاکم بر تبدیل لاپلاس جواب مساله چیست؟

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - x\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + t\dfrac{\partial x}{\partial t} = t^2 \\ u(x,0) = 1 \quad ; \quad u_t(x,0) = 2 \\ u(0,t) = t \end{cases}$$

حل : با فرض $L\{u(x,t)\} = U(x,s)$ از دو طرف معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$L\left\{\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\right\} - L\left\{x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\} + L\left\{t\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = L\{t^2\}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}\{sU - u(x,0)\} - x\{s^2U - su(x,0) - u_t(x,0)\} - \frac{\partial}{\partial s}(sU - u(x,0)) = \frac{2}{s^3}$$

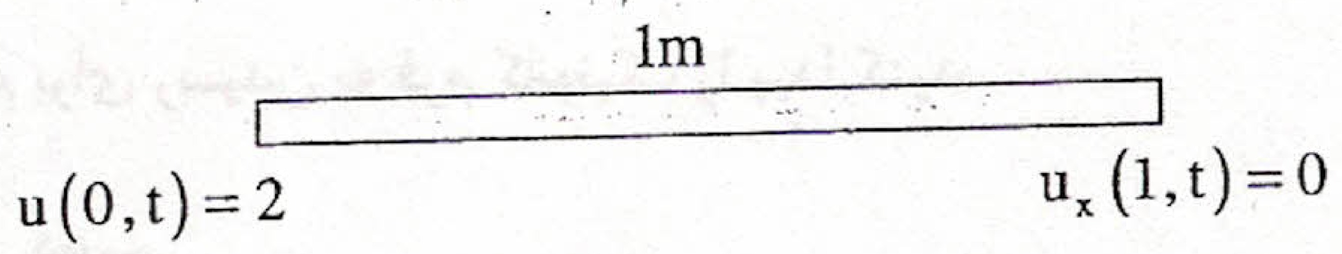
$$s\frac{\partial U}{\partial x} - xs^2U + sx + 2x - U - s\frac{\partial U}{\partial s} = \frac{2}{s^3}$$

و البته تبدیل لاپلاس شرط مرزی نیز چنین است:

$$u(0,t) = t \xrightarrow{\ \ell\ } U(0,s) = \frac{1}{s^2}$$

مثال : معادله انتقال حرارت میله‌ای به طول 1 به صورت $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4x + \dfrac{\partial u}{\partial t}$ داده شده است چنانچه سر میله در دمای ثابت 2 و انتهای میله عایق شده باشد توزیع دمای حالت ماندگار یعنی $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t) = u_{ss}(t)$ را بیابید.

حل :



در حالت ماندگار $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$ است لذا معادله مورد نظر به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4x \Rightarrow \text{انتگرال} \ \frac{\partial u}{\partial x} = 2x^2 + C$$

با اعمال شرط $u_x(1,t)$ به‌دست می‌آید:

$$0 = 2 + C \Rightarrow C = -2$$

لذا داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x^2 - 2 \Rightarrow \text{انتگرال} \ u = \frac{2}{3}x^3 - 2x + k$$

با اعمال شرط $u(0,t) = 2$ به‌دست می‌آید $k = 2$

مثال : معادله با مشتقات جزئی با شرایط زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos x + \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad 0 < x < \pi \\ u(0,t) = 1 \quad ; \quad u(\pi,t) = 2 \\ u(x,0) = 1 \quad ; \quad u_t(x,0) = x \end{cases}$$

با فرض آن‌که (*) $u(x,t)=w(x,t)+\varphi(x)$; $\varphi(x)$ را طوری پیدا کنید که معادله حاکم بر w از نوع همگن و شرایط مرزی آن نیز همگن باشد.

حل: جواب (*) را در معادله قرار می‌دهیم:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\varphi''(x)=\cos x+\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

اگر بخواهیم معادله فوق برای w همگن باشد، یعنی نباید در معادله جملات فاقد w داشته باشیم، یعنی باید $\varphi''(x)$, $\cos x$ از معادله حذف شود و این حاصل نمی‌شود مگر این که $\varphi''(x)=\cos x$ باشد لذا داریم:

$$\varphi''(x)=\cos x \Rightarrow \varphi'(x)=\sin x+C \Rightarrow \varphi(x)=-\cos x+cx+k(**)$$

چون می‌خواهیم شرایط مرزی برای w همگن باشد باید:

$$w(0,t)=0 \quad ; \quad w(\pi,t)=0$$

لذا:

$$u(0,t)=w\cancel{(0,t)}^{\,0}+\varphi(0)\Rightarrow \varphi(0)=1$$

$$u(\pi,t)=w\cancel{(\pi,t)}^{\,0}+\varphi(\pi)\Rightarrow \varphi(\pi)=2$$

با اعمال شرایط در (**) داریم:

$$\varphi(0)=1\Rightarrow 1=-1+0+k\Rightarrow k=2$$

$$\varphi(\pi)=2\Rightarrow 2=1+C\pi+2\Rightarrow C=-\frac{1}{\pi}$$

لذا به‌دست می‌آید:

$$\boxed{\varphi(x)=-\cos x-\frac{1}{\pi}x+2}$$

اگر بخواهیم شرایط اولیه حاکم بر w را پیدا کنیم می‌نویسیم:

$$u(x,t)=w(x,t)-\cos x-\frac{1}{\pi}x+2$$

$$u_t(x,t)=w_t(x,t)$$

حال داریم:

$$u(x,0)=w(x,0)-\cos x-\frac{1}{\pi}x+2$$

$$u_t(x,0)=w_t(x,0)$$

مثال : جواب معادله لاپلاس همراه با شرایط مرزی زیر را مشخص کنید:

$$\begin{cases}\nabla^2 u=0 & 1<r<0\\ & 0\le\theta\le 2\pi\\ u(1,\theta)=2 & \\ u(e,\theta)=0 & \end{cases}$$

حل : با توجه حل معادله لاپلاس در حالت خاص داریم:

$$u(r)=A\,Ln\,r+B$$

با اعمال شرایط مرزی داریم:

$$\begin{aligned}u(1)=2 &\Rightarrow 2=ALn(1)+B\Rightarrow B=2\\ u(e)=0&\Rightarrow 0=ALne+B\Rightarrow A=-2\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad u(r)=-2Ln\,r+2\Rightarrow \text{یا}\ \ u(x,y)=-2\,Ln\sqrt{x^2+y^2}+2$$

مثال : توزیع مکانی و زمانی درجه حرارت $u(x,t)$ در میله‌ای به طول π که دو طرف آن در مخلوط آب و یخ قرار گرفته و منبع حرارتی باعث ایجاد توزیع دمای اولیه $u(x,0)=\sin x$ در میله‌شده است و در معادله $u_{xx}=u_t$ صدق می‌کند کدام است؟

الف) $\sin x\cos t$ ب) $\sinh x.e^{-t}$ ج) $\sin x.e^{-t}$ د) $\sin x\, e^{-\frac{t}{\pi}}$

حل :

برای ارضای شرایط مرزی $u(0,t)=u(\pi,t)=0$ ملاحظه می‌شود تمام گزینه‌ها به جز گزینه (ب) قابل قبول می‌باشد ($\sin 0=0$ و $\sin\pi=0$ ولی $\sinh\pi\neq 0$)

توجه داریم تمام گزینه‌ها برای حالت حدی $t\to+\infty$ شرط محدود ماندن جواب را ارضا می‌کند اما به سادگی می‌توان دید تنها گزینه‌ای که معادله $u_t=u_{xx}$ را ارضا می‌کند گزینه (ج) می‌باشد زیرا:

$$u(x,t)=\sin x.e^{-t}\Rightarrow u_x=\cos x.e^{-t}\ ,\ u_{xx}=-\sin xe^{-t}\qquad ,\qquad u_t=-\sin xe^{-t}$$